Formules de changement de pôle en coordonnées sphériques

P. Bénard

file : rotation.tex

13 février 2006

Résumé

Dans cette note, on calcule les formules de changement de pôle en coordonnées sphériques. C'est à dire les formules de transformation des coordonnées sphériques pour un changement de repère défini par une rotation $\mathcal{R}$ du repère initial autour du centre O des coordonnées. Pour caractériser la rotation $\mathcal{R}$ on la définit comme celle qui amène un point donné a priori $P : (\lambda_p, \theta_p)$ vers le pôle supérieur, et qui amène le pôle supérieur initial $NP : (\lambda_{NP} = 0, \theta_{NP} = \pi/2)$ sur le méridien origine des nouvelles longitudes. On note (λ, θ) les coordonnés sphérique d'un point dans le repère initial et (λ', θ') les coordonnées sphériques de ce même point dans le nouveau repère, déduit du repère initial par la rotation $\mathcal{R}$.
Les formules de transformation sont donc les formules qui relient (λ', θ') à (λ, θ) et vice versa.

1 Formules de transformation directes

Soit (O, x, y, z) le repère cartésien usuel attaché au système de coordonnées sphériques (λ, θ) initial, c'est à dire tel que :

$$x = \cos\theta\ \cos\lambda \tag{1}$$
$$y = \cos\theta\ \sin\lambda \tag{2}$$
$$z = \sin\theta \tag{3}$$

Nous allons décomposer la rotation $\mathcal{R}$ en deux rotations successives $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ plus simples. La première rotation $\mathcal{R}_1$ autour de l'axe Oz amènera le point P à l'opposé de l'origine des longitudes. La seconde rotation $\mathcal{R}_2$ sera la rotation amenant directement le point P au pôle supérieur.

Première rotation

Pour un point X de coordonnées initiales (λ, θ), les nouvelles coordonnées sphérique après la rotation $\mathcal{R}_1$ seront notées (λ^*, θ^*). Comme l'indique la Figure 1, la rotation $\mathcal{R}_1$ est une rotation d'angle $(\pi - \lambda_p)$ autour de l'axe Oz.
Les coordonnées sphériques après la rotation $\mathcal{R}_1$ sont alors :

$$\lambda^* = \lambda + \pi - \lambda_p \tag{4}$$
$$\theta^* = \theta \tag{5}$$

On note (O, x^*, y^*, z^*) le nouveau repère cartésien naturel attaché aux nouvelles coordonnées (λ^*, θ^*). On a donc :

$$x^* = \cos\theta^*\ \cos\lambda^* \tag{6}$$
$$y^* = \cos\theta^*\ \sin\lambda^* \tag{7}$$
$$z^* = \sin\theta^* \tag{8}$$

$\Longrightarrow$

$$x^* = -\cos\theta\ \cos(\lambda - \lambda_p) \tag{9}$$
$$y^* = -\cos\theta\ \sin(\lambda - \lambda_p) \tag{10}$$
$$z^* = \sin\theta \tag{11}$$

Seconde rotation

Ensuite, on définit la rotation $\mathcal{R}_2$ comme la rotation autour de l'axe (Oy^*) amenant le point P au pôle supérieur. Cette rotation est décrite sur les figures 2 (vue de dessus) et 3 (vue de face). C'est donc une rotation d'angle négatif $(\theta_p - \pi/2)$ dans le plan (O, x^*, z^*). On note (O, x', y', z') le repère cartésien attaché aux coordonnées finales (λ', θ'), obtenues après la rotation $\mathcal{R}_2$:

$$x' = \cos\theta'\ \cos\lambda' \tag{12}$$
$$y' = \cos\theta'\ \sin\lambda' \tag{13}$$
$$z' = \sin\theta' \tag{14}$$

On a alors par définition de la rotation $\mathcal{R}_2$:

$$x' = x^*\cos(\theta_p - \pi/2) - z^*\sin(\theta_p - \pi/2) \tag{15}$$
$$z' = x^*\sin(\theta_p - \pi/2) + z^*\cos(\theta_p - \pi/2) \tag{16}$$
$$y' = y \tag{17}$$

$\Longrightarrow$

$$x' = x^*\sin\theta_p\ + z^*\cos\theta_p \tag{18}$$
$$z' = -x^*\cos\theta_p\ + z^*\sin\theta_p \tag{19}$$
$$y' = y* \tag{20}$$

Par substitution de (12)–(14) dans (18)–(20) on obtient donc :

$$\sin\theta' = -x^*\cos\theta_p\ + z^*\sin\theta_p \tag{21}$$
$$\cos\theta'\ \cos\lambda' = x^*\sin\theta_p\ + z^*\cos\theta_p \tag{22}$$
$$\cos\theta'\ \sin\lambda' = y^* \tag{23}$$

La première de ces équations définit θ' sans ambiguité puisque $\theta' \in [-\pi/2, \pi/2]$.

Transformation Directe

On obtient finalement par simple substitution de (9)–(11) dans (21)–(23) les formules de transformation directe entre (λ, θ) et (λ', θ') :

$$\sin\theta' = \sin\theta_p\sin\theta + \cos\theta_p\cos\theta\cos(\lambda - \lambda_p) \tag{24}$$
$$\cos\theta'\ \cos\lambda' = \cos\theta_p\sin\theta - \sin\theta_p\cos\theta\cos(\lambda - \lambda_p) \tag{25}$$
$$\cos\theta'\ \sin\lambda' = -\cos\theta\sin(\lambda - \lambda_p) \tag{26}$$

2 Formules de transformation inverses

Une fois les formules de transformation directes trouvées, les formules de transformation inverses s'en déduisent aisément. En faisant (24)$\times \sin\theta_p$+(25) $\times \cos\theta_p$ on obtient en effet :

$$\sin\theta = \sin\theta_p \sin\theta' \; + \cos\theta_p \cos\theta' \; \cos\lambda' \tag{27}$$

Ce qui définit θ sans ambiguité puisque $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$. Puis, en substituant (27) dans (25) :

$$\cos\theta' \; \cos\lambda' = \cos\theta_p(\sin\theta_p \sin\theta' \; + \cos\theta_p \cos\theta' \; \cos\lambda') - \sin\theta_p \cos\theta \cos(\lambda - \lambda_p) \tag{28}$$

$\Longrightarrow$

$$\cos\theta \cos(\lambda - \lambda_p) = \cos\theta_p \sin\theta' - \sin\theta_p \cos\theta' \; \cos\lambda' \tag{29}$$

Enfin, (26) donne directement :

$$\cos\theta \sin(\lambda - \lambda_p) = -\cos\theta' \; \sin\lambda' \tag{30}$$

d'où le système de transformation inverses :

$$\begin{aligned}
\sin\theta &= \sin\theta_p \sin\theta' \; + \cos\theta_p \cos\theta' \; \cos\lambda' && (31)\\
\cos\theta \cos(\lambda - \lambda_p) &= \cos\theta_p \sin\theta' - \sin\theta_p \cos\theta' \; \cos\lambda' && (32)\\
\cos\theta \sin(\lambda - \lambda_p) &= -\cos\theta' \; \sin\lambda' && (33)
\end{aligned}$$

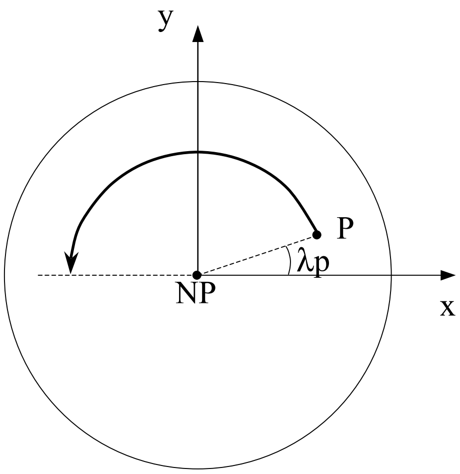

Fig. 1 – Première rotation $\mathcal{R}_1$ (vue de dessus)

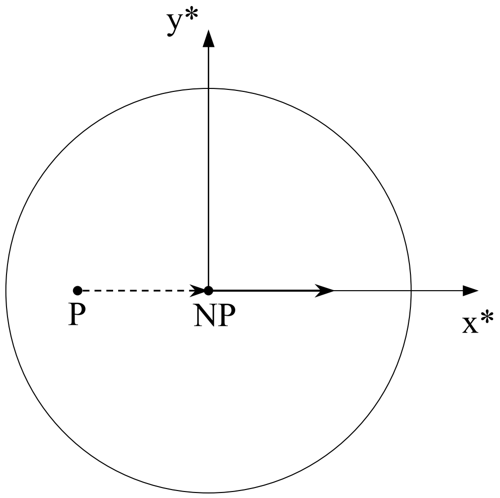

FIG. 2 – Seconde rotation $\mathcal{R}_2$ (vue de dessus)

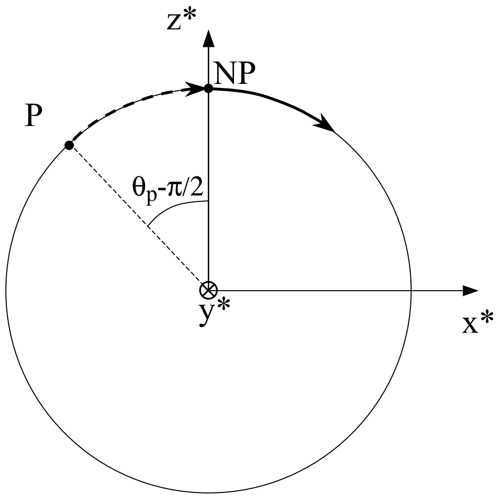

FIG. 3 – Seconde rotation $\mathcal{R}_2$ (vue de face)